Verinotio
NOVA FASE

ARTIGO

DOI 10.36638/1981-061X.2024.29.2.740

A escolha de Karl Marx: o cálculo diferencial em *Manuscritos matemáticos*

The choice of Karl Marx: differential calculus in the Mathematical manuscripts

Antônio Valverde[*]
Maria Helena Soares de Souza[**]

Resumo: O presente artigo busca dar a ver a fundamentação teórica do cálculo diferencial, em matemática, com base nos Manuscritos matemáticos, de Karl Marx, sob movimento dialético e seus vínculos com o social. Para o caso, a escolha de Marx confronta as propostas de Leibniz, D'Alembert / Euler e Lagrange, acerca do cálculo diferencial. Nomeadas de mística, racional, algébrica, e simbólica, esta criada por Marx. Segundo Gerdes, a solução marxiana oferece a possibilidade de desenvolvimento de métodos adequados para melhor compreensão dos fins da educação matemática (ensino e aprendizagem), se observados os princípios da dialética marxiana. Para tanto, o artigo perpassa, criticamente, partes da história da matemática e da filosofia relativas aos suportes da argumentação desenvolvida.

Palavras-chave: Marx; Manuscritos matemáticos; cálculo diferencial; sociedade; educação.

Abstract: This article seeks to demonstrate the theoretical foundation of differential calculus, in mathematics, based on Karl Marx's Mathematical manuscripts, under dialectical movement and its links with the social. In this case, Marx's choice confronts the proposals of Leibniz, D'Alembert / Euler and Lagrange, regarding differential calculus. Named mystical, rational, algebraic, and symbolic, this one was created by Marx. According to Gerdes, the Marxian solution offers the possibility of developing appropriate methods for better understanding the purposes of mathematical education (teaching and learning), if the principles of Marxian dialectics are observed. To this end, the article critically examines parts of the history of mathematics and philosophy relating to the support of the argument developed.

Keywords: Marx; Mathematical manuscripts; differential calculation; society; education.

> *A par da leitura de poetas e romancistas, Marx tinha outra maneira, muito pouco comum, de descansar intelectualmente: o estudo da matemática, pela qual tinha especial predileção. A álgebra lhe proporcionava até mesmo um tipo de consolo moral: era um refúgio nos momentos mais dolorosos de sua vida atormentada. Durante a última doença da esposa, era-lhe impossível dedicar-se ao trabalho científico habitual. Só conseguia escapar do abatimento ocasionado pelos sofrimentos de sua companheira de vida concentrando-se na matemática. Naquele período de dor profunda, ele escreveu um trabalho sobre cálculo infinitesimal. [...] Na matemática avançada ele via o movimento dialético em sua forma mais lógica e, ao mesmo tempo, mais simples."*
>
> (Paul LAFARGUE, Reminiscences of Marx and Engels, 1957, p. 75)[1]

[*] Antonio José Romera Valverde é Professor do PPG em Filosofia da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). E-mail: valverde@pucsp.br.
[**] Maria Helena Soares de Souza é Doutora em Educação Currículo pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), Graduada em Matemática pela USP. *E-mail*: maria_souza@uol.com.br.
[1] Cf. MUSTO (2018, pp. 101-2). Jenny von Westphalen, esposa de Marx, faleceu aos dois dias de

Preâmbulo

Os *Manuscritos matemáticos* compõem parte dos estudos de Karl Marx (1818-1883), que tiveram publicação póstuma tardia. Para o caso, a primeira e parcial é de 1933, após 50 anos de sua morte[2]. No Ocidente, o primeiro matemático a divulgar e analisar os estudos matemáticos marxianos foi Dirk-Jan Struik, na revista *Science and Society*, em 1948[3]. Os *Manuscritos* contêm resoluções de equações algébricas – de grau superior –, séries, geometria analítica e cálculo diferencial[4]. Este último obteve sua maior atenção, não por casualidade. As razões que levaram Marx a interessar-se, de forma mais explicitada pela matemática, iniciaram com a teoria da *mais-valia*, ante o temor de cometer erros de cálculo, apontados em sua correspondência com Engels[5]. Além disso, o filósofo considerava o estudo da matemática um descanso para seu espírito, sob duplo objetivo: colocar suas leis econômicas em forma algébrica e analisar, do ponto de vista da dialética, os raciocínios usados no cálculo diferencial. Por certo, Marx estivesse em busca de "leis", sob recursos de modelagem matemática, que regulassem as crises econômicas.

---

dezembro de 1881, às margens de completar sessenta e oito anos. Estiveram juntos desde 1836. Marx faleceu "aos 14 de março (1883), às quinze para as três da tarde, [...] vítima de tuberculose. [...] Assim como Darwin descobriu a lei do desenvolvimento natural, Marx descobriu a lei do desenvolvimento humano. [...] Mas em todos os terrenos estudados por Marx, e ele estudou muitos, nenhum deles superficialmente, em todos os terrenos, até mesmo as matemáticas, ele fez descobertas" (ATALI, 2007, pp. 343-4).

[2] "Uma primeira publicação parcial dos Manuscritos matemáticos surge em 1933, na revista soviética Pod Snamenem Marxisma (= Sob a bandeira do marxismo), por ocasião do 50º aniversário da morte de Marx. Esta publicação despertou imediatamente o interesse de especialistas. Em 1935, Valerii I. Glivenko (1897-1940) publica uma análise comparativa dos conceitos de diferencial nos trabalhos de Marx e nas obras famoso matemático francês Jacques Hadamard (1865-1963). Em 1947, outro soviético Levan P. Gokieli (1901-1975) publica uma monografia sobre os Manuscritos matemáticos de Marx. O primeiro autor a divulgar e analisar o conteúdo dos Manuscritos matemáticos de Marx no ocidente, é o matemático norte-americano de origem holandesa, Dirk-Jan Struik (1894-2000), que publicou um artigo intitulado Marx e a matemática na revista Science and Society (=Ciência e Sociedade) em 1948. [...] A publicação dos Manuscritos matemáticos provocou o aparecimento de muitos artigos de análise e de debate, entre outros de Miller, Rieske, Shcenk, Kennedy, Janovskaja, Matarrese e Ponzio. Na 2ª Conferência de Verão sobre a História da Matemática, que teve lugar em Liepaja, na União Soviética, em 1978, o filósofo-matemático Vladimir Molodschi (1906-...) apresentou uma comunicação intitulada Os Manuscritos matemáticos de Marx e os avanços na história da matemática na URSS, em que salienta a influência inspiradora do estudo dos Manuscritos matemáticos sobre o nascimento e o desenvolvimento da escola soviética da história da matemática" (GERDES, 2008, pp. 22-4).

[3] No Brasil, Dirk-Jan Stuik, matemático e teórico de economia de talhe marxista, é conhecido pela obra História concisa da matemática. 3. ed. Trad. João C. S. Guerreiro. Lisboa: Gradiva, 1997.

[4] O conceito de diferencial fora estudado, detalhadamente, por Marx, que antecipara a ideia do diferencial como símbolo operacional, surgida no século XX. Em 1927, Jacques Hadamarck mostrou o papel operativo do diferencial, sem conhecer o trabalho de Karl Marx, cuja divulgação no Ocidente se deu apenas em 1948.

[5] "No início de 1858, ele relatou a Engels ter cometido tantos erros de cálculo durante a redação dos Grundrisse que, "por desespero, tinha voltado a estudar álgebra". Ao amigo confessara: "Nunca me senti em casa com a aritmética", mas "com a ajuda da álgebra conseguirei pôr as coisas em ordem" (MUSTO, 2018, p. 41).

Os *Manuscritos matemáticos*, objeto deste ensaio, contam com mais de mil páginas de estudos acerca do cálculo diferencial e integral, de aritmética e de geometria, além de aplicações à economia. Entanto, tiveram menor atenção que outros estudos de Marx, e foram, inicialmente, publicados na União Soviética, depois em círculos marxistas do Ocidente, com duas décadas de diferença. A publicação integral dos *Manuscritos* deu-se em comemoração aos 150 anos do nascimento do Corifeu da Filosofia Moderna. Um dos objetivos explicitados, nos *Manuscritos*, fora o de retirar o véu mítico dos procedimentos matemáticos usados no cálculo diferencial, de modo não fundamentado, com foco nas abordagens dos matemáticos do século XIX, como Cauchy (1789-1857) e Bolzano (1781-1848). Assim, a obra revela não apenas a compreensão do desenvolvimento do cálculo diferencial, como tentativa de aprimorar uma ferramenta fundamental da matemática, mas, o entendimento dos bastidores teóricos da II Revolução Industrial.

Mesmo desconhecendo os *Manuscritos matemáticos*, Karl Korsch (1886-1971) no ensaio "O ponto de vista da concepção materialista da história", de março de 1922, portanto, anterior à publicação de *Marxismo e filosofia*, de 1923, registrara, criticamente:

> os epígonos de Marx, que se incluem eles mesmos entre os "marxistas ortodoxos", equivocam-se completamente quando – como Renner, na Áustria, ou Cunow, na Alemanha – sentem a irresistível necessidade de "completar" a economia política do marxismo com uma teoria marxista acabada do direito ou do estado ou ainda com uma sociologia marxista. O sistema marxista passa muito bem sem esses complementos e sem uma "filologia" ou uma "matemática" marxistas. O conteúdo dos sistemas matemáticos é, também ele, condicionado histórica, social, econômica e praticamente – e é significativo que este domínio suscite hoje bem menos polêmicas que outros domínios, incomparavelmente mais concretos, do saber humano. Não há nenhuma dúvida de que antes, durante e sobretudo depois da transformação radical do mundo sócio-histórico que se aproxima, as matemáticas também conhecerão uma transformação "mais ou menos rápida". A validez da concepção materialista da história e da sociedade estende-se igualmente às matemáticas. Mas seria ridículo se um marxista – apoiando-se no seu conhecimento mais aprofundado das realidades econômicas, históricas e sociais, que determinam também "em última instância", o desenvolvimento passado e futuro da ciência matemática – pretendesse opor uma nova matemática "marxista" aos sistemas que os matemáticos edificaram laboriosamente no curso de séculos (KORSCH, 2008, p. 128).

Encarte histórico

Marx estudara e anotara o livro de Poppe, História das matemáticas desde a Antiguidade aos tempos modernos, publicado em Tübigen, 1828, que consta dos

Manuscritos tecnológicos, de 1851, organizados por E. Dussel (DUSSEL, 1964). Contudo, segundo Caraça (1901-1948)[6], duas são as exigências para a formação de um quadro explicativo de Ciência: a compatibilidade, ou a obediência à razão consigo própria e a realidade, que forneça um meio de conhecer e de prever fenômenos. Porém, "a ciência não tem, nem pode ter, como objectivo descrever a realidade tal como ela é. Aquilo a que ela aspira é construir quadros racionais de interpretação e previsão; a legitimidade de tais quadros dura enquanto durar o seu acordo com os resultados da observação e da experimentação" (CARAÇA, 1975, p. 107).

De modo parcimonioso, não é possível afirmar que a ciência atinge a essência última da realidade, mas fornece uma imagem e as leis que satisfaçam a compreensão da realidade. A história da ciência mostra inúmeros exemplos de renovação e substituição de quadros explicativos, pois, ações teóricas e práticas encontram-se em reciprocidade contínua, de *alimentação* mútua, que se traduzem em movimentos de incompletude e de busca de aperfeiçoamentos ou adaptações.

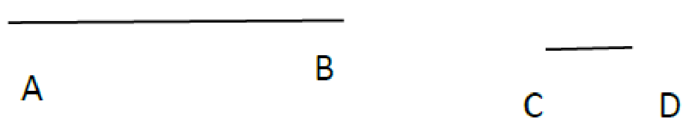
Os primeiros fisiólogos para compreenderem as *razões* e as *ligações* dos fenômenos naturais partiram de questões fundamentais, de caráter ontológico: para além da diversidade aparente dos fenômenos, acaso existiria um princípio único, ao qual tudo se reduz? Qual é a estrutura do Universo? Como surgiram os astros? Como se movem? O que é movimento? Para tanto, recorreram, inicialmente, à estrutura do mito, encontrada pronta, de modo a ensaiar a posição favorável ao princípio único e à compreensão da natureza, em movimento. Ao passo, que a escola de Pitágoras, florescida no século VI a.C., fundava-se nas noções de *quantidade* e de *arranjo* – ou *harmonia*, como determinantes da diversidade dos fenômenos naturais e dos corpos. A concepção era original e de magnitude, pois considerava todas as coisas como "número", ao estabelecer ligações entre as leis matemáticas e a ordenação do Universo[7]. Na procura de uma estrutura idêntica à numérica para a matéria, formada por corpúsculos *cósmicos* de extensão não nula, agrupados em determinada quantidade e ordem, evidenciou-se a dificuldade de verificação ou demonstração da afirmação "tudo é número". Os corpúsculos, denominados *mônadas,* eram identificados com a *unidade numérica.* Os corpos se compunham por quantidade e arranjos distintos de *mônadas*, como os números se formam por quantidade e arranjo

[6] Conceitos fundamentais da matemática, de Bento de Jesus Caraça, cuja primeira edição ocorreu em 1941, é ainda considerada obra de referência dos matemáticos, pois, politiza o conhecimento da área.
[7] Os números para a Escola de Pitágoras são os inteiros positivos, ou os racionais positivos, que são quocientes entre números inteiros.

de unidades[8].

Os arranjos numéricos poderiam ser fracionários para medir um segmento, em comparação com outro, tomado como unidade, estabelecendo-se uma *razão*. No caso da questão: quanto mede o segmento AB, na unidade *u*, que é o comprimento do segmento CD (Figura 1).

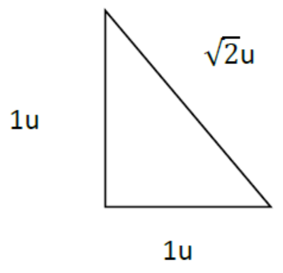
Figura 1



A medida do segmento AB é dada pela razão entre as medidas dos dois segmentos, isto é $\frac{AB}{CD}$ que corresponde ao número de unidades *u* que "cabem" dentro do segmento AB. A razão é descrita por um número racional, com o numerador e o denominador que são, ou podem ser reduzidos a números inteiros positivos.

A contestar a Escola Pitagórica, por ironia, o próprio Teorema de Pitágoras foi, parcialmente, responsável pelo descrédito da afirmação "todos os corpos são formados por mônadas", dado o aparecimento de medidas, que não podem ser expressas por números inteiros ou racionais positivos. Em um triângulo retângulo, cujos catetos medem uma unidade, a sua hipotenusa deve medir $\sqrt{2}$ unidades, que é um número irracional, não podendo ser escrito na forma fracionária com numerador e denominador inteiros positivos (Figura 2):

Figura 2



Teorema de Pitágoras:

A soma da medida dos catetos ao quadrado é igual ao quadrado da medida da hipotenusa.

$1^2+1^2=(\sqrt{2})^2$

[8] Uma consequência dos arranjos, foi a de atribuir virtudes especiais a determinados números, por serem eles o princípio de tudo. Os números 6 e 28, por exemplo, são ditos perfeitos, por serem iguais à soma dos próprios divisores: 6=1+2+3 e 28=1+2+4+7+14. Divisores próprios de um número inteiro positivo são todos os seus divisores, exceto o próprio número.

Um segmento que meça $\sqrt{2}\ u$ não pode ser expresso por *pequenas partes,* sejam *mônadas* ou não. Caraça destaca, através de indícios posteriores, a reação de esconder o fato[9], que apontava para a falência da teoria das *mônadas* (CARAÇA, 1975, p. 72), ao que conclui:

> De resto, o caráter de seita da escola pitagórica, em que os aspectos místico e político, este fechado e aristocrático, ombreavam com o aspecto científico, prestava-se a essa tentativa de segredo à volta de questão de tal maneira embaraçosa. Onde só havia a ganhar com o debate público e extenso, os pitagóricos instituíram como norma, pelo contrário, o segredo e o silêncio. (CARAÇA, 1975, p. 75)

Ainda segundo o Autor, outra tentativa de *fuga* foi a de que, considerando infinito[10] o número de mônadas, que formam o segmento de reta, a discrepância desapareceria, - argumento contestado, posteriormente, por Parmênides e Zênon.

Zenon questionara a existência dos corpúsculos materiais de extensão não nula, que contraria a afirmação fundamental "todas as coisas são número". Argumento de que entre dois corpúsculos deve haver um espaço, pois se estivessem unidos, qual seria a distinção entre eles? Esse espaço deveria ser maior que cada corpúsculo, que são os menores possíveis, dentro da teoria pitagórica. Sendo assim, seria possível intercalar um terceiro corpúsculo, e estariam presentes dois espaços, ambos maiores que cada corpúsculo. Repetindo o raciocínio indefinidamente, seria possível intercalar, entre os dois primeiros corpúsculos, quantos fossem desejados, o que levaria à interrogação: qual é o número pertencente ao segmento determinado por dois corpúsculos, tomados como iniciais?

Argumentações, que findaram por estabelecer o princípio da *imobilidade*, dificuldade imposta pela *incomensurabilidade*, que é característica do *existente.* Porém, o que é mais característico do Universo do que a *mobilidade*? Para a superação de ideias, que se compõem dessa forma, há necessidade de compreensão do que é *infinito*, do que é *movimento* e, também, de *continuidade.*

Porém, tais conceitos não foram resolvidos na Antiguidade, pois, optou-se pela

[9] "Vários indícios posteriores mostram que a primeira reação foi a de esconder o caso. [...] como um dos mais preciosos desses indícios, aparece na seguinte passagem de Plutarco, acerca da vida de Numa Pompilius, XXXV: '...diz-se que os pitagóricos não queriam pôr as suas obras por escrito, nem as suas intenções, mas imprimiam a ciência na memória daqueles que eles reconheciam dignos disso. E como algumas vezes comunicaram alguns dos seus mais íntimos segredos e das mais escondidas subtilezas da geometria a algum personagem que não o merecia, eles diziam que os deuses por presságios evidentes, ameaçavam vingar este sacrilégio e esta impiedade, com alguma grande e pública calamidade" (CARAÇA, 1975, p. 75).

[10] Infinito considerado o "muito grande".

incapacidade numérica de resolver o problema da incomensurabilidade do segmento, que trouxe a *degradação* do número em relação à geometria. Segundo Caraça:

> Concluiu-se pelo *abandono das concepções dinâmicas,* sempre que tal fosse possível – a matéria grega é invadida pelo *horror ao movimento.* Estes traços – *degradação do número, horror do infinito, horror do movimento* – constituem a trincheira cômoda da hibernação, formam o biombo prudente que o filósofo grego coloca entre si e a realidade. (CARAÇA, 1975, p. 81)

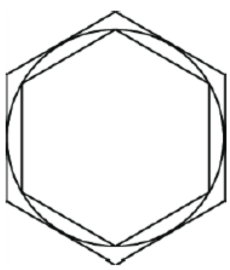
Sob tal perspectiva, o personagem Sócrates e o filósofo Platão deslocaram a atenção humana das coisas externas ao homem para as internas, na busca de princípios “espirituais” como explicações científicas, ao abandonarem a realidade sensível em troca da concepção de imutabilidade do conceito. O “sistema” filosófico de Platão fora criticado e não aceito por inteiro, pela defesa contra a fluência e a rejeição do devir. Com isto, a ciência grega se tornou incapaz de construir o conceito de *função*, base para o cálculo diferencial. Para tal, seria necessário conceber a noção de variável; abandonar o estudo apenas qualitativo dos fenômenos naturais e estabelecer o quantitativo; criar vínculos entre a geometria e a aritmética, conectando o conceito de movimento à geometria. Trabalho realizado somente ao início da Idade Moderna, distintamente, por Cardano, Descartes, Fermat, dentre outros.

Infinito e infinitesimal

A introdução do conceito de função como instrumento da ciência, aliada ao de variável, exigiu um novo olhar da humanidade sobre a *fluência.* Isaac Newton (1643-1727) denominou as funções por *fluentes.* Os conceitos de infinito e de infinitesimal encontram-se na base dos estudos marxianos dos *Manuscritos matemáticos,* e merecem destaque especial. Pois, para Galileu (1564-1642): “[O infinito e o infinitesimal] transcendem ao nosso entendimento finito, o primeiro devido à sua magnitude, o segundo devido à sua pequenez; imagine o que eles são quando combinados” (GALILEU *apud* ROONEY, 2012, p. 152).

Números irracionais, como π e $\sqrt{5}$, são representados por séries infinitas, e podem ser indicados com representações decimais cada vez maiores, que não são determináveis. Tanto os números infinitamente grandes como os infinitamente pequenos (infinitesimais) foram, e têm sido, fonte de estudos para os matemáticos e de extrema utilidade em todas as ciências.

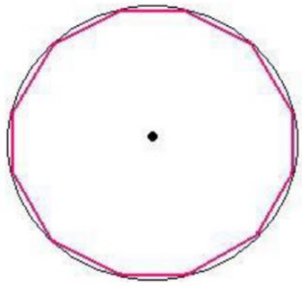
Figura 3



Arquimedes (287-212 a.C.)[11] calculou a área aproximada de um círculo ao desenhar polígonos internos e externos, cada vez com maior número de lados, e calculou suas áreas, até que elas convergissem para o mesmo valor (Figura 3). Encontrou, na utilização das áreas dos polígonos, dois conceitos que se tornaram, posteriormente, muito relevantes: limite e infinito.

A área perfeita seria dada por polígonos com número infinito de lados, e o próprio círculo poderia ser considerado um polígono desta natureza, pois, os dois polígonos, inscrito e circunscrito, convergiriam para o lugar geométrico círculo (figura 4). O procedimento é o de relacionar a área desconhecida com outra, mais fácil de ser calculada. Posteriormente, no século XVII, o método de Arquimedes foi associado a uma formulação algébrica adequada, o cálculo integral[12].

Figura 4



A pesquisa determinada pelo desenvolvimento da ciência deu origem, a partir da segunda metade do século XVI, a incentivos para cálculos de áreas, de volumes e de variações de velocidade. Simon Stevin (1548-1620)[13] e Johannes Kepler (1571-1630) trabalharam o cálculo de áreas de figuras irregulares, dividindo-as em "fatias" muito finas, cujas áreas eram fáceis de calcular. Stevin aplicou o método para determinar o centro de gravidade de objetos sólidos. Kepler, à sua vez, utilizou a medição de áreas sobre caminhos curvos, significativa em seus trabalhos de astronomia. Curiosamente, valeu-se também do procedimento para determinar, com certa precisão, o volume de vinho em barril abaulado, sem a introdução, como era feito, de uma vara que apenas media a altura atingida pelo vinho, quando o barril não estava nem cheio e nem pela metade[14].

Ideia simplificada de limite

Para lidar com o conceito de número infinitamente "grande" é adequado intuir

---

[11] Arquimedes obteve valores com boa aproximação para o número π.

[12] O sucesso do método só pôde ocorrer graças ao desenvolvimento da geometria analítica e o rigoroso entendimento dos limites.

[13] Stevin foi o primeiro europeu a mostrar entendimento acerca de trabalhar com frações e decimais, tendo usado uma barra vertical no lugar de ponto e/ou vírgula.

[14] Em verdade, se a altura do vinho atingisse um quarto do comprimento da vara, o barril conteria menos que a quarta parte do volume total do vinho, pois era mais abaulado acima dessa altura, o que traria prejuízo aos compradores.

que se um número é “bastante grande”, como um trilhão, sempre haverá outro maior, como um trilhão mais um. Afirmar que um valor numérico tende ao infinito é dizer que, no limite, este número é infinito (infinitamente grande ou infinitamente pequeno). Em linguagem simbólica matemática, para indicar um determinado número, que tende a ser infinitamente grande, escreve-se $x \to +\infty$, e lê-se x tende a mais infinito.

O símbolo ∞ é a notação para infinito e o sinal antes dele, indica infinito positivo, ou à direita dos infinitos números reais, se representados na reta numérica. Como o número $+\infty$ não está determinado deve ser escrito:

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

O mesmo vale para números infinitamente pequenos:

$$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

Em nota, Hegel (1770-1831) aborda o infinitamente grande e o infinitamente pequeno, afirmando:

> A definição ordinária do infinito matemático é: se há uma grandeza após aquela se ela é infinitamente grande, não há nenhuma grandeza maior; ou se ela é definida como infinitamente pequena, não há nenhuma grandeza menor [...] uma grandeza é definida em matemática como qualquer coisa que pode aumentar ou diminuir (MARX, 1985, p. 84).[15]

A utilização de limites não se remete apenas ao infinito, mas, pode particularizar- se para qualquer número. Ao dizer que $x \to 0$, por exemplo, deseja-se que o número procurado se aproxime o mais possível de zero. Os números da sequência numérica 0,01; 0,001; 0,0001 se aproximam de zero e, no caso, o número 0,00....1, com infinitas casas decimais é bastante próximo de zero, mas não é igual a zero. No limite, o número mais próximo de zero é o próprio zero:

$$\lim_{x \to 0} x = 0$$

A notação substitui o fato de o número se aproximar do valor (indicado) sem jamais “tocá-lo”. Em verdade, trata-se da resposta para a pergunta: “para qual número o valor está tendendo?” — e não para transformá-lo naquele número.

[15] Tradução dos autores.

Ao pensar em algumas operações numéricas escolhidas para o valor *x*, como elevá-lo ao quadrado, o mesmo fenômeno ocorre:

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

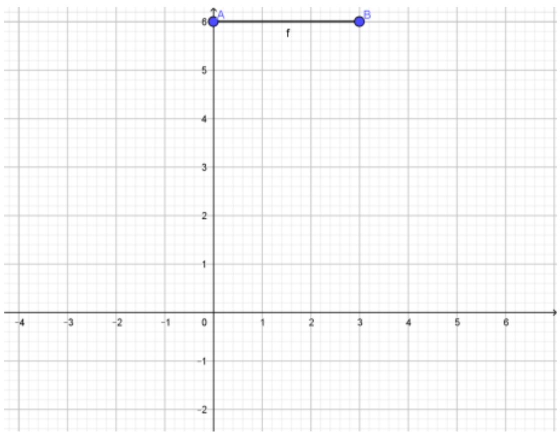
Basta elevar ao quadrado alguns valores próximos ao número 2, como 1,99; 1,9999, cujo resultado se aproxima de 4: $(1{,}99)^2 = 3{,}9601$; $(1{,}9999)^2 = 3{,}999960001$.

Ideia simplificada de *cálculo*: integração e derivação

O *cálculo* fornece ferramentas intelectuais para medir taxas de mudanças e respectivos efeitos, com duas partes conhecidas, a diferenciação e a integração, uma inversa da outra, ou *cálculo diferencial* e *integral*. O teorema conhecido como *Fundamental do cálculo*[16] estabelece o vínculo entre ambas, pois, aplicando a diferenciação a uma integral, retorna-se à função original e *vice-versa*. Os dois procedimentos são, em sua essência, métodos de aproximação, usando os limites que tornam os erros de precisão tender a zero.

Uma pessoa, que se move a uma velocidade constante de 6 km/h, durante três horas, tem o movimento representado por um segmento horizontal (paralelo ao eixo-x)[17], como gráfico[18] da velocidade em relação ao tempo, pois, sua equação é dada por: $v(x) = 6$, tal que $0 \leq x \leq 3$. A representação gráfica é assim estabelecida porque, no caso, não há aceleração. A pessoa se desloca com velocidade uniforme e não há taxa de variação. O eixo horizontal determina o tempo, em horas, e o vertical a velocidade em quilômetros por hora (km/h).

Figura 5



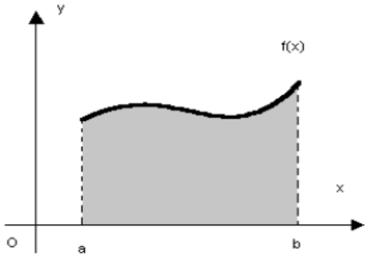
[16] Sobre o teorema, conferir em Souza (2018, p. 212).
[17] Eixo das abscissas.
[18] Gráfico construído pelo programa *Geogebra*.

Para saber qual a distância percorrida pela pessoa, basta calcular a área, no gráfico[19] (Figura 5), sob o segmento paralelo ao eixo-x, no caso, 18 km.

Em um caso geral, para f(x) =k, considerando o intervalo[20] [a,b], a área A é dada por A= k.(b-a). Quando a velocidade não é constante (ou uniforme), o que significa que há aceleração no movimento, a situação de movimento muda. Há taxa de variação da velocidade e o gráfico é representado por uma curva não retilínea. A aceleração em determinado instante é medida pela inclinação da curva naquele ponto, e é feita pelo *cálculo diferencial,* enquanto a distância percorrida pelo *cálculo integral*.

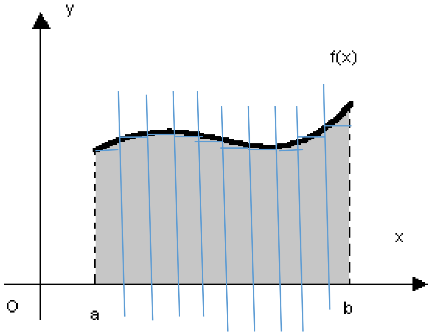
Como calcular a área **A** da região, sob o gráfico de uma velocidade, em um intervalo fechado [a,b], como mostra a figura 6? Observa-se, pelo gráfico, que se a velocidade se altera ao longo do tempo, a área sob a curva também.

Figura 6



Não sendo a velocidade constante, é preciso subdividir o intervalo [a,b] em subintervalos, sufi-cientemente pequenos, para que neles se possa considerar as parte do gráfico da velocidade como constantes, com boa aproximação (Figura 7).

Figura 7



[19] Em 1361, o bispo francês Nicholas Oresme (1323-1382) estabeleceu a relação entre área, velocidade e distância percorrida. Talvez tenha sido o primeiro a usar um sistema de coordenadas sem relação com a cartografia.

[20] O intervalo é fechado quando suas extremidades pertencem a ele e a notação é a indicada no texto. Se, por exemplo, o valor **a** não pertencesse ao intervalo e o valor **b** sim, a notação seria] a,b]. Os intervalos [a,b[e]a,b[são abertos: no primeiro **b** não pertence ao intervalo e no segundo **a** e **b** também não.

Em cada intervalo, é possível calcular os valores aproximados das áreas de cada pequeno retângulo, supondo que o pedaço da função que representa a velocidade, naquele intervalo, seja constante. A área **A** procurada, será a soma das áreas dos retângulos ou o limite da soma, que mais se aproxima dessa área. Pois, quanto maior for as subdivisões, do intervalo [a,b], em subintervalos, cada vez menores, mais se aproxima de um número infinito de subdivisões. Aquela área é a integração da função velocidade. A determinação aproximada da área, por retângulos infinitamente pequenos, até a soma de um número infinitamente grande destes retângulos, é um exemplo, segundo o matemático Labérenne (1902-1985), extremamente adequado de dialética, que usa a interpretação de *infinito* e *infinitesimal*.

A notação usada para indicar a integral de uma função f(x)[21], em um determinado intervalo, é dada por $\int^{b} f(x)dx$. Lê-se integral de f(x) no intervalo [a,b]. No caso da velocidade, a letra *x* é substituída pela letra *t*, que indica tempo. Observa-se que ***a*** e ***b*** são os valores inferior e superior de ***t***, que limitam a área, e *dx* significa uma variação muito pequena de *x*.

Dois conceitos são fundamentais para entender as funções, relações especiais entre duas grandezas: o isolamento e a variação. Imagine-se duas grandezas, a quantidade de quilômetros percorridos por uma pessoa em uma caminhada, e o tempo utilizado na atividade. Sabe-se que a cada hora caminhada corresponde uma quantidade de quilômetros percorridos, ou uma variação nessa quantidade. Para o estudo da relação entre as duas grandezas, é necessário estabelecer um isolamento das duas, como o desgaste físico ou a quantidade de água consumida durante a caminhada, que não interessam na relação entre as duas grandezas destacadas no exemplo, a velocidade e o espaço percorrido.

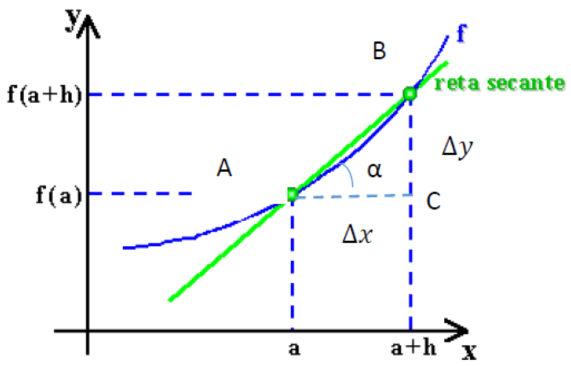
Para a conceituação de derivação é possível utilizar duas interpretações, uma de significado intuitivo, advindo da noção de limite, e outra, geométrica. Ambas se apresentam descritas com exemplos tirados da história da matemática. O quociente $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ é a variação da função, designada simbolicamente por $\frac{\Delta x}{\Delta y}$, isto é, pelo quociente entre as diferenças dos valores de y e os valores de x, no qual f(a) é o valor da função no ponto a.

[21] As funções que aparecem em situações de derivação e integração são contínuas. Uma função é dita contínua em determinado valor de a se $\lim_{x \to a} f(x) = \mathrm{f(a)}$.

Para uma função f(x), a derivada no ponto *a*, simbolicamente designada por f'(a), é dada por $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Donde se lê: derivada de f(x) para *x=a* é igual ao limite do quociente entre f(x)-f(a) e *(x-a*), quando *x* tende ao valor *a*.

A figura 8 mostra a representação gráfica[22] de uma função, na qual estão marcados Δy e Δx e o ângulo α determinado em um triângulo retângulo.

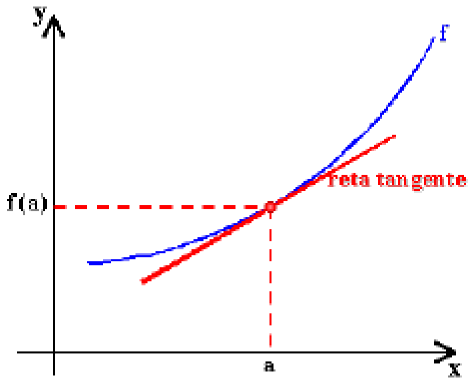
Figura 8



$$tg\alpha = \frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

No limite, quando **x** tende ao valor **a**, tem-se a reta tangente à curva nesse valor (figura 9).

Figura 9



A derivada de uma função f(x) para *x=a* é igual ao coeficiente angular[23] da reta tangente à curva, no ponto P (a, f(a)). A reta **s**, secante à curva, que representa a função e passa por A e B, fica estabelecida se for conhecida, além das coordenadas dos pontos, a sua declividade ou inclinação[24]. A declividade da reta é dada pela tangente

[22] Os gráficos 6 e 7 foram construídos com uso do programa Geogebra.

[23] Coeficiente angular ou declividade de uma reta é determinado pelo quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

[24] Outra denominação para declividade: coeficiente angular.

de α (ou tgα), ângulo entre a reta e o eixo-x, segundo a orientação do eixo, e dessa forma, o problema passa a ser o de determinar o valor de tgα (Figura 8).

As coordenadas dos pontos são: $A(X_A, Y_A)$, $B(X_B, Y_B)$ e $C(X_B, Y_A)$. A reta tem declividade dada pelo quociente entre as medidas BC e AC dos catetos[25]:

$$\text{tg}\alpha = \frac{BC}{AC}$$

Se for traçada uma reta **r**, tangente à curva, e se B estiver "infinitamente" próximo de A, a reta **s** "coincide" com a reta **r** e, portanto, devem ter a mesma declividade.

Observando a figura 8, vê-se que $BC = y_B - y_A$ e $AC = x_B - x_A$, logo

$$\text{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{y_B - y_a}{x_B - x_A}$$

BC é uma distância "infinitamente pequena", nomeada por Leibniz de "diferencial de y" ou *dy*.[26] Da mesma maneira, AC é um "diferencial de x" ou *dx*.

Denominando, genericamente, $x_B = x_1$, $x_A = x_0$, $y_B = y_1$ e $y_A = y_0$, tem-se:

$$dx = x_1 - x_0, \text{ logo } x_1 = x_0 + dx \text{ e } dy = y_1 - y_0$$

$$\text{Sabe-se que } y_1 = x_1^2 + bx + c = (x_0 + dx)^2 + b(x_0 + dx) + c =$$

$$= x_0^2 + 2x_0\,dx + dx^2 + b\,x_0 + b\,dx + c \quad \text{e}$$

$$y_0 = x_0^2 + bx_0 + c$$

Com os devidos acertos algébricos, tem-se:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x_0 dx + bdx + dx^2}{dx} = 2x_0 + b + dx$$

Como *dx* é "infinitamente pequeno", poderia ser suprimido da igualdade e assim $\frac{dy}{dx} = 2x_0 + b$. Sendo x_0 abscissa de um ponto qualquer, pode-se escrever que $\frac{dy}{dx} = 2x + b$, assume valores numéricos diferentes para distintos valores de ***x***.

A função f'(x), que é derivada da função $f(x) = x^2 + bx + c$, é o conjunto das infinitas declividades das retas tangentes ao gráfico que representa a função f(x).

Indica-se f'(x) = 2x+b.

---

[25] Em um triângulo retângulo, a tangente de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo.

[26] Marx distingue os diferenciais *dx* e *dy* dos valores de diferenças infinitamente pequenas, Δx e Δy.

Se a função escolhida fosse f(x) = 2x, estabelecido o procedimento anteriormente descrito, a função derivada f'(x) estaria definida por f'(x)=2, que é o coeficiente angular da reta y=2x.

Cálculo diferencial

"*Karl Marx: arrancar o véu misterioso aos métodos infinitesimais.*"
(Paulus GERDES, 2008)

A evolução da matemática sempre esteve em conexão com os regimes políticos e sociais vigentes. Assim, o cálculo infinitesimal surgiu com a ciência moderna, sob o horizonte de desenvolvimento inicial do modo de produção capitalista.

A partir da criação da geometria analítica, a matemática passou por uma transformação significativa, de ciência que estudava as grandezas constantes para as variáveis, capaz de analisar e calcular movimentos, desde o estudo de balística aos movimentos dos astros. O conhecimento do cálculo diferencial e integral, considerado o "telescópio" matemático (GERDES, 2008, p. 28), alcançou notáveis aplicações práticas: na artilharia, na construção de fortificações ou na resolução de problemas hidrodinâmicos. Entanto, há que se pensar que o conhecimento do cálculo diferencial e do infinitesimal não é fruto da genialidade de um só povo, ou de uma só pessoa, mas do trabalho contínuo de gerações de matemáticos, notadamente nos séculos XVI, XVII e XVIII, em diversos países[27]. Não se trata da produção somente de notáveis matemáticos, mas, também de trabalhadores, que buscaram soluções para problemas reais, ultrapassando dúvidas, hesitações e contradições, "*sofrendo toda a influência que o ambiente da vida social exerce sobre a criação da Ciência*".[28]

Marx, compreendida a aplicabilidade do cálculo diferencial e integral, percebeu a necessidade de fundamentação metodológica dos conceitos e da interpretação dos exemplos dialéticos – e matemáticos – do "infinitamente pequeno" e do "infinitamente grande"[29]. Ainda que pareça um rebaixamento da riqueza dos *Manuscritos*, para a

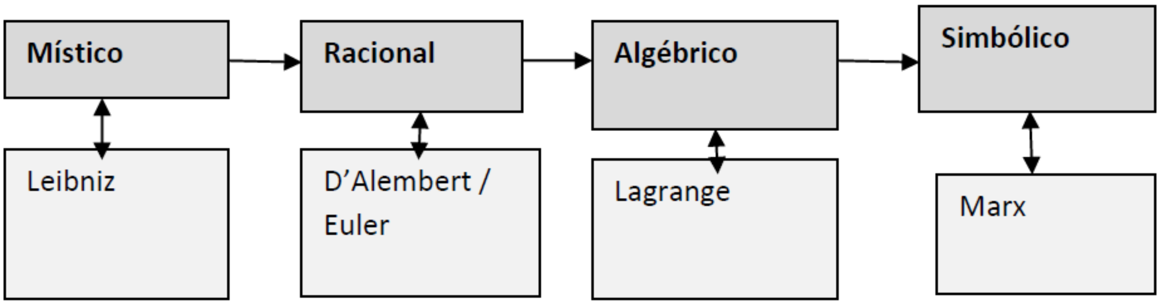
[27] Como, dentre outros, os italianos Federico Commandino, no séc. XVI; Galileu Galilei e Bonaventura Cavalieri, do início do séc. XVII; Evangelista Torriccelli, no séc. XVII; o alemão Johann Kepler, no séc. XVII; o holandês Cristiaan Huygens, no séc. XVII; o francês Pierre de Fermat, no séc. XVII; os ingleses John Wallis e Isaac Barrow, no séc. XVII e, notadamente, o alemão Gottfried Leibniz e o inglês Isaac Newton, fim do séc. XVII, início do séc. XVIII.

[28] CARAÇA, "Prefácio" (Duas atitudes em face da Ciência).

[29] Para exemplificar, no cálculo do comprimento de linhas curvas, os matemáticos – aos primórdios do cálculo infinitesimal – consideram-no como a soma de um número infinitamente grande de segmentos de retas, infinitamente pequenos. Do mesmo modo, áreas de retângulos infinitamente pequenos, em quantidades infinitamente grandes, instrumentam o cálculo de áreas sob curvas.

compreensão do estudo do cálculo diferencial, sugere-se o esquema (Figura 10), a ser explicitado parte a parte, com exemplos e explicações dos procedimentos metodológicos, o de estabelecer os vínculos citados, anteriormente.

Figura 10



Procedimento místico

Para Marx, o procedimento de Leibniz, embora desse certo para outras funções, continha um equívoco, o de tratar *dx* como zero, trazendo em consequência $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, logo um cálculo indeterminado. Segundo Euler (1707-1783), não é possível, aritmeticamente, dividir por zero. Mais ainda dividir zero por zero, embora os "zeros" tenham significados geométricos distintos, ou medidas de diferentes segmentos, simbolizados por *dx* e *dy*.

D'Ambrosio (1932-2021), matemático, introdutor da etnomatemática no Brasil, em sua obra *Cálculo e introdução à análise* (1975), indica o equívoco em considerar $\frac{dy}{dx}$ como quociente, pois além de não oferecer significado correto, tem o inconveniente de fazer com que se simplifique, de forma equivocada, os procedimentos de cálculo. O tratamento dado às diferenças "infinitamente pequenas" foi chamado de *místico* por Marx, caracterizando-o por "doença infantil do cálculo infinitesimal"[30]. No entanto, ressalta-se que os limites indicam tendências a um determinado valor, e não a substituição pelo próprio valor.

Pois, considerar $x1 = x + \Delta x$ transformado doravante em $x1 = x + dx$, é uma escolha arbitrária e, segundo Marx, uma explicação *metafísica,* que carrega consigo a necessidade de escamotear os caminhos dos termos *dx* e Δx para obter derivadas de

---

[30] Marx apresenta um segundo exemplo, utilizando a função $f(x)=ax^3+bx^2+cx-e$, cuja função derivada é $f'(x)= 3ax^2+2bx+c$, advinda do ponto de partida $\frac{dy}{dx}$, árvore genealógica das funções derivadas, a partir da primeira original.

qualquer ordem[31]. “Assim se crê mesmo no caráter misterioso do modo de calcular que venha descobrir resultados exatos (e em outro verdadeiramente extraordinário em suas aplicações geométricas) graças a procedimentos matemáticos positivamente falsos” (MARX, 1985, p. 195)[32].

Marx não foi o primeiro a criticar Newton e Leibniz. Alguns matemáticos tradicionais não aceitaram o novo cálculo, como George Berkeley (1685-1753), pois perceberam a ambiguidade do tratamento dado às grandezas infinitamente pequenas. Leibniz reconheceu que a notação $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+dx)-f(x)}{dy}$, aproximação habitual para a inclinação da tangente, trazia um problema, pois se *dx* e *dy* são diferentes de zero, $\frac{dy}{dx}$ não é a taxa de variação instantânea. Ele tentou contornar o problema, considerando *dx* e *dy* infinitamente pequenos, deslocando o problema para outro contexto.

Newton, outro “criador” do cálculo, apresentou sua pesquisa acerca do tema a Isaac Barrow (1630-1677) e Edmond Halley (1656-1742), que o incentivaram a publicar o resultado de seu trabalho, ocorrido em 1672. A principal lei do movimento, de Newton, afirma que a aceleração de um corpo em movimento, multiplicada pela sua massa, é igual à força que age sobre o corpo. A velocidade é expressa pela derivada da posição do corpo e a aceleração é derivada da velocidade. Ambos chegaram à conclusão que a função g(x), cuja área sob a curva de seu gráfico, é da forma $f(x) = x^m$, tem por resposta $g(x)= mx^{m-1}$ ou $g(x)=f'(x)$.

A abordagem de Newton para o cálculo de derivadas era semelhante à de Leibniz, exceto ao usar zero no lugar de *dx*, de modo que seu método também utilizava a aproximação. Considerado zero como sendo muito pequeno, no limite o erro desaparece porque o valor se torna exato. Newton usou o termo *fluxão* para captar a ideia de uma grandeza fluindo rumo ao valor zero, sem jamais chegar a tal valor[33]. Marx utilizava a notação $\dot{x}$ para *dx* e $\dot{y}$ para *dy*[34]. Observe-se a indicação da variável assinalada com um ponto acima da letra. Ele poderia ter contornado o problema, pois era sabido que as coisas se movem e possuem velocidade, a cada instante. O que fora descrito como "dogmatismo empírico", em contraste ao "dogmatismo metafísico", de

[31] As derivadas podem ser obtidas consecutivamente em primeira, segunda etc. até a n-ésima derivada.
[32] Tradução dos autores.
[33] Em 1711, Leibniz publicou *Método de fluxões e séries infinitas*.
[34] A se considerar *dx* como uma diferença numérica *não normal (não arquimédica)*, como seria possível aplicar regras numéricas para *números normais*? Contemporaneamente, *dx* é considerado não *arquimédico*.

Leibniz.

Ao longo do século XVIII, a dificuldade permaneceu. No entanto, Euler tentou pensar cálculos em multiplicações e divisões de zeros.

Procedimento racional

Leibniz e Newton utilizaram a igualdade "x1=x0+*dx*", porém, D'Alembert (1717- 1783) e Euler fizeram uma correção metodológica ao procedimento, afirmando que "x1=x0+Δx", sendo Δx um *acréscimo finito* e, portanto, um valor numérico, para o qual valem as regras da Álgebra. Assim sendo, o cálculo infinitesimal foi afastado do que Marx chamou de *procedimento místico.*

O método usado por D'Alembert é essencialmente algébrico para a função $f(x)=x^2$, usando o desenvolvimento do Binômio de Newton:

$$y_1=x_1^2=(x_0+\Delta x)^2=x_0^2+2\,x_0\,\Delta x+\Delta x^2 \text{ e } y_0=x_0^2$$

Δy é o acréscimo numérico de valores da função, que corresponde ao acréscimo Δx, da *variável x*:

$$\Delta y=y_1-y_0=2\,x_0\,\Delta x+\Delta x^2$$

O quociente entre os acréscimos fica sendo:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x_0\Delta x}{\Delta x}+\frac{\Delta x^2}{\Delta x}=2x_0+\Delta x$$

Se $x_1=x_0$, temos $\Delta y=y_1-y_0=x_0^2-x_0^2=0$ e, portanto, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{0}{0}=2x_0$ ou $\frac{0}{0}=2x$, considerado x_0 como qualquer valor.

O resultado final é o mesmo, mas não foi obtido por "desprezar" valores próximos a zero, e sim como resultado de uma operação matemática, que envolve o quociente de valores, isto é, o *procedimento racional*. No entanto, a divisão $\frac{0}{0}$ permanece nos dois procedimentos.

Euler, sabendo não ser possível dividir zero por zero[35], deu aos "zeros" do cálculo diferencial um significado geométrico, de razão entre as medidas de dois segmentos. As duas deduções – ou procedimentos – são, segundo Marx, as mesmas,

[35] A divisão por zero não determina um valor numérico. Se dividirmos 10 por 2 obtemos o quociente 5, porque 5x2=10. Se dividirmos 10 por zero podemos escolher qualquer valor porque o produto de zero por qualquer valor é sempre zero. A divisão de zero por zero acaba por evidenciar uma indeterminação, não um quociente.

conhecido de antemão o quociente $\frac{dy}{dx}$ apesar da utilização do cálculo algébrico. Segundo Marx:

> D'Alembert havia depurado o cálculo diferencial de seu véu místico, e lhe fez um progresso enorme. Qualquer que seja o *Tratado dos fluidos*, publicado em 1774, o método de Leibniz não foi destronado em França durante anos. Ele mal precisou relevar que (o ensinamento de Newton) dominava a Inglaterra desde os primeiros decênios do século XIX. Mas aqui, como anteriormente em França, os princípios de D'Alembert tornaram-se, e permanecem até hoje, ainda que com algumas modificações. (MARX, 1985, p. 198)

Procedimento algébrico de Lagrange

Para "libertar" os cálculos diferenciais das "grandezas infinitamente pequenas", Lagrange (1736-1813) findou por introduzir a definição de derivada. Tomando como exemplo a função $f(x)=x^2$, utilizando como D'Alembert o acréscimo Δx:

$f\,(x+\Delta x) = (x_0+\Delta x)^2 = x_0^2+2\,x_0\,\Delta x + \Delta x^2$ e ao coeficiente de Δx denomina-se derivada de f(x) com a notação f'(x). Assim, f'(x)=2x.

O estudo inicial das derivadas foi feito com funções polinomiais, o procedimento incluía divisões sucessivas e as séries de Taylor (1685-1731), que desvinculou o procedimento das "grandezas infinitamente pequenas" e, portanto, o quociente entre dois zeros. Porém, nem todas as funções podem ser tratadas da mesma forma o que, segundo Marx, invalida o procedimento.

Lagrange optou por algebrizar o cálculo diferencial, tomando como ponto de partida imediato o Teorema de Taylor[36], que havia sobrevivido ao estudo de Newton, sendo mais geral, englobando uma forma de operação do cálculo diferencial pelo desenvolvimento de uma série expressa por f(x+h). O método, segundo Marx, libertou-se de tudo que poderia parecer transcendência metafísica, baseando-se apenas em operações algébricas. Apesar disso, Lagrange ainda substituiu grandezas variáveis por constantes e utilizou, na prática, os métodos criticáveis de Leibniz.

Método de Marx (Simbólico)

O método, proposto por Marx e avaliado por Engels, move o valor x_0 de x para x_1, fazendo com que haja de fato variação, enquanto seus antecessores partiram de

[36] Conferir Souza (2018, p. 222).

x0+ Δx, que representa uma soma de duas grandezas, mas não a variação de uma. O que mostra a originalidade de Marx na explicitação do procedimento teórico, em curso. Voltando ao exemplo $f(x)=x^2$, se a variável independente **x** cresce (ou decresce) de um determinado valor x0 até outro valor x1, a variável *y* dependente de *x*, varia de y0 até y1. Tomando o quociente entre as diferenças

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{x_1^2 - x_0^2}{x_1 - x_0}$$

Fatorando o numerador do quociente, tem-se: $(x_1^2 - x_0^2) = (x_1 - x_0).\ (x_1 + x_0)$

Então $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x1-x0).(x1+x0)}{x1-x0}$ $=(x_1+x_0)$, que Marx denominou "derivada provisória à direita". Desse modo, se $x_1=x_0$ a derivada transforma-se em $(x_0+x_0) = 2x_0$. Logo, a derivada definitiva $f'(x_0) = 2x_0$.

Do lado esquerdo, x1 regressa até x0 e, finalmente, se iguala ao valor: x1-x0 = 0, o que implica em Δy=0. Isso não significa que temos $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{0}$ porque seu conteúdo foi comprovado do lado direito, com resultado final fundamental. Tal resultado que $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ obtido por Marx tem valor matemático necessário, "pois zero, em sua forma ultra primitiva que pode ter, não importa qual valor porque $\frac{0}{0} = x$ deve fornecer sempre 0 = 0. Mas aqui $\frac{0}{0}$ aparece como equivalente simbólico de um valor real determinado..." MARX,1985, p. 146).

Para estabelecer a diferença entre o método de Marx e os anteriores, é necessário lembrar que Leibniz e Newton partem de x1=x0+*dx*, e D'Alembert, Euler e Lagrange de x1 = x0+Δx, isto é, de adições, considerando tanto *dx* como Δx como grandezas distintas de x0. A derivada provisória 2x0, do exemplo, aparecia antes da diferenciação, isto é, antes da substituição de Δx por zero. A derivada definitiva de Marx surge, pela primeira vez, quando x1 tiver "voltado" a x0. A derivada definitiva é o resultado final do processo de diferenciação, enquanto nos demais procedimentos, não há mostra de movimento, falha essencial que o método proposto por Marx tenta sanar.

O processo dialético não é apenas a existência de contrários, pois o *materialismo histórico* considera a contradição ligada a um movimento. Não basta afirmar que o valor é igual a zero e também diferente de zero. A diferenciação proposta por Marx, se apresenta como um processo dialético, particularmente quanto à negação da negação, pois a primeira negação exprime a compreensão do processo de transformação (de onde se parte e para qual direção seguir). A segunda negação é consequência da primeira e algebricamente correta, após o restabelecimento da igualdade. Trata-se, portanto, de uma movimentação de compreensão teórica.

Marx[37] realizou um salto de qualidade ao abandonar a matemática das grandezas constantes para a das variáveis, desde o momento em que os *diferenciais dx*, *dy* etc. funcionam como ponto de partida do cálculo, invertendo o método algébrico de diferenciação de D'Alembert, Euler e Lagrange. Ele conseguiu dar fundamentação dialética para a diferenciação de uma classe de funções, segundo Gerdes. O diferencial, tratado como um símbolo operacional, evidencia significados em generalizações contemporâneas, do conceito para a análise funcional.

Marx coloca-se contra a ideia de "matemáticas", como Leibniz e Newton, que consideravam o cálculo diferencial distinto da Álgebra. Para ele, a Matemática é única e seus ramos têm autonomia relativa. A essência do cálculo reside no papel operativo dos símbolos em seu desenvolvimento. O método de diferenciação, segundo ele, é o *processo real* de obtenção de funções derivadas. Derivar e integrar são procedimentos da teoria dos algoritmos[38]. O Autor reforça que, na transição da derivada provisória para a definitiva, $x1$ não tende para $x0$ e Δx não tende a zero, pois substitui, efetivamente, $x1$ por $x0$, sem que haja aproximação infinita e Δx é igual a zero (MARX, 1985, pp. 170-1).

Deste modo, um algoritmo é uma sequência finita de instruções, definidas sem ambiguidade, que são executadas "mecanicamente", inclusive por meios eletrônicos, pois podem repetir passos (ou iterações), fundadas na lógica matemática. Existem algoritmos para computadores, mas também para execução de tarefas. Eles podem ser classificados por:

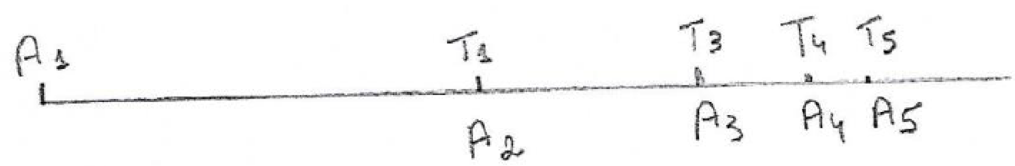
- Implementação com recursos: interativos; pela lógica; seriais ou não; determinísticos ou não; exatos ou aproximados;
- Por paradigma, como: divisão e conquista; programação computacional; redução a outro problema; busca e enumeração; probabilístico;

[37] Marx deduziu e analisou, pelo mesmo procedimento, a fórmula para o cálculo de derivadas de funções que podem ser escritos como produto de outras.
[38] O uso corrente da palavra *algoritmo* – procedimentos técnicos de obtenção de resultados – se altera quando se trata de sua teoria, que envolve a lógica, o formalismo e até mesmo a intuição. Segundo Gerdes (p. 78), os algoritmos, junto com a teoria das funções recursivas, foram e têm sido fundamental para a utilização dos computadores.

- Por campo de estudos;
- Pela complexidade.

Gerdes estabeleceu uma relação entre a natureza dialética do movimento, acerca de um dos paradoxos lógicos de Zenon (GERDES, 2008, p. 79), o de Aquiles e a tartaruga. Nele o herói Aquiles, muito veloz, aposta uma corrida com uma tartaruga, que a inicia com uma vantagem. Aquiles sai de um ponto A1 e a tartaruga de um ponto T1. Quando Aquiles atingir o ponto T1 (ou A2), a tartaruga, que anda devagar, terá atingido o ponto T2, após percorrer uma distância menor que a anterior. Quando Aquiles chegar ao ponto T2 (ou A3), a tartaruga terá atingido o ponto T3. Repetindo o procedimento, com a tartaruga percorrendo distâncias cada vez menores, Aquiles, embora seja bastante rápido, nunca alcançará a tartaruga, isto é, a distância entre eles nunca será nula.

Figura 11



Segundo Marx, este limite será alcançado, isto é, a distância entre Aquiles e tartaruga poderá ser zero e não *tenderá* a zero, tendo em vista a realidade do movimento. Atualmente, para a maioria dos matemáticos, o conceito é relevante e significativo ao corresponder aos processos da realidade.

Zenon tentou mostrar que o acontecimento de ultrapassagem de Aquiles é impossível, porque é impossível a divisibilidade do espaço e do tempo. Esta afirmação é anterior à construção dos números reais. O paradoxo é resolvido pela soma das distâncias entre os corredores, considerando a notação dA1, A2 como a distância entre dois pontos e a sua soma: dA1, A2+ dA2, A3+ dA3, A4+ dA4, A5+... que dará a distância percorrida por Aquiles, eliminando a abstração da divisibilidade.

A ideia de movimento no mundo real significa encontrar-se em um lugar e, simultaneamente, não estar nele, revelando a continuidade e também a descontinuidade do tempo e do espaço. O que Marx alcançou, segundo Gerdes (2008), pela negação da negação. “O caráter dialéctico do método de Marx, por exemplo, quanto à lei da negação da negação, reflecte no pensamento a dialéctica objetiva do movimento do mundo real" (GERDES, 2008, p. 82)[39].

Considerações finais

É possível supor que o interesse de Marx pela fundamentação do cálculo diferencial esteja na essência de sua mudança? Ou supor que encontrar novos caminhos para resolver questões principais da vida humana está entre a Matemática e a Filosofia? Gerdes ressalta alguns elementos matemáticos que reforçam tal possibilidade: a estreita relação entre "a matemática e a realidade material; o papel axiomático da matemática; o rigor de sua fundamentação; o conteúdo e o significado de sua simbologia; o problema da *infinibilidade* (atual, potencial ou uma unidade das duas); a luta dos contrários; discreto e contínuo, concreto e abstrato, finito e infinito..." (GERDES, 2008, p. 83). Ressalte-se, no entanto, a natureza da matemática clássica, que é tomada como referência por Marx.

Pode-se dizer que, a partir de Descartes, a movimentação e a dialética adentraram no campo da matemática, e foram indispensáveis para o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral. Segundo Engels, os homens pensaram dialeticamente antes de saber o que era a dialética, ao que Labèrenne completa: "E o que é verdadeiro para o homem em geral, é talvez – neste caso da dialéctica – ainda mais verdadeiro para matemáticos (GERDES, 2008, p. 86)[40].

O estudo produzido em *Os manuscritos matemáticos de Marx,* analisado e compreendido, pode servir para elaboração de novos métodos de ensino da Matemática. Gerdes aponta a utilização para o ensino do conhecimento matemático básico (GERDES, 2008, pp. 92-6), em exemplos de álgebra elementar para obter uma fórmula de resolução de equações de segundo grau, até alcançar a conhecida pelos brasileiros como fórmula de Báskara; em geometria, na determinação do ponto médio de um segmento e na trigonometria, na obtenção de fórmula para a tangente da soma de dois ângulos. Em todos os exemplos é apontada a necessidade de obtenção de um valor intermediário – primeira negação – até ao resultado final, utilizando a negação da negação.

Apropriar-se do procedimento de Marx em aprendizagem da matemática básica não é usual, mas pode ser uma forma a fazer desaparecer, do imaginário do estudante de Matemática, o "caráter mágico" e imutável das situações vivenciadas por ele em

---

[39] Mantida a grafia original.
[40] *Idem per idem.*

sala de aula, além de ampliar as possíveis conexões com o ensino da filosofia. Ao passo de oferecer recursos de raciocínio aos professores e estudantes, de modo a favorecer a compreensão da realidade a partir do materialismo histórico, como fundamentação do conhecimento pelo viés da dialética e da imanência.

Em visão mais ampla, pode-se afirmar a importância da versão inglesa dos *Manuscritos Matemáticos de Marx* (1983), seguida da francesa (1985), que reacenderam as discussões contemporâneas sobre a utilização de instrumentos matemáticos em análises da economia política e ensino da matemática.

Referências

ATALI, Jacques. **Karl Marx ou o espírito do mundo**. Trad. Clóvis Marques. Rio de Janeiro: Record, 2007.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemática.** 6. Ed. Lisboa: Gráfica Brás Monteiro Ltda., 1975.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Cálculo e introdução à análise.** São Paulo: Nacional, 1975.

GERDES, Paulus. Os **Manuscritos filosófico-matemáticos de Karl Marx sobre o cálculo diferencial:** uma introdução. **Tlanu – Revista de Educação Matemática**, Maputo, 2008.

KORCSH, Karl. "A concepção materialista da história". *In:* ______. **Marxismo e filosofia.** Trad. José Paulo Netto. Rio de Janeiro: UFRJ, 2008, pp. 123-46.

MARX, Karl. **Les *Manuscrits mathematiques* de Marx**. Trad. Alain Alcouffe. Paris : Economica, 1985. (Premiere traduction française)

MARX, Karl. **Mathematical manuscripts of Karl Marx.** London : New Park Publications, 1983.

MEHRING, Franz. **Carlos Marx, el fundador del socialismo científico.** Historia de su vida. Trad. W. Roces. Buenos Aires: Editorial Claridad, 1943.

MEHRING, Franz. **Karl Marx – a história de sua vida.** Trad. José Luis e Rosa Sundermann. 2. Ed. São Paulo: Sundermann, 2014.

MIRANDA, Gustavo A. de. A popularização da matemática: os **Manuscritos matemáticos** de Karl Marx e o **Calculus made easy** de Sivanus Thompson. In: **IV Encontro Brasileiro de Educação e Marxismo**, 2009, São José do Rio Preto. Coletânea de textos do IV EBEM – *CD-Rom.* Marilia: Oficina Universitária, 2009.

MUSTO, Marcello. **O velho Marx**: uma biografia de seus últimos anos (1881-1883). Trad. Rubens Enderele. São Paulo: Boitempo, 2018.

ROONEY, Anne. **A história da matemática**: desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M. Brooks do Brasil, 2012.

SOUZA, Maria Helena. **21 teoremas matemáticos que revolucionaram o mundo**. São Paulo: Planeta do Brasil, 2018.

STEWART, Ian. **Em busca do infinito**: uma história da matemática dos primeiros números à Teoria do Caos. Trad. George Schlesinger. Rio de Janeiro: Zahar, 2014.

VALVERDE, Antonio. "Karl Marx: aportes ao fetichismo tecnológico". *In:* OLIVEIRA, J. (Org.). **Filosofia da tecnologia**: seus autores e seus problemas. Caxias do Sul: Educs, 2022, pp. 191-202.

Sampa, Verão de 2024.

Como citar:

VALVERDE, Antonio; SOUZA, Maria Helena Soares de. A escolha de Karl Marx: O cálculo diferencial em *Manuscritos matemáticos*. *Verinotio*, Rio das Ostras, v. 29, n. 2, pp. 244-268; jul.-dez., 2024.